ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки
Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-757-775
УДК 517.97

ЗАЧЕМ НУЖНА РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА И ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА И ЧТО ОНА ДАЕТ

© **М. И. Сумин**

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23
E-mail: m.sumin@mail.ru

Аннотация. Рассматривается регуляризация классических принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в выпуклых задачах математического программирования и оптимального управления. На примере «простейших» задач условной бесконечномерной оптимизации обсуждаются два основных вопроса: зачем нужна регуляризация классических условий оптимальности и что она дает?
Ключевые слова: выпуклое программирование; двойственная регуляризация; регуляризованный принцип Лагранжа; оптимальное управление; обратная задача; регуляризованный принцип максимума Понтрягина

Введение

Хорошо известно, что задачам оптимизации и оптимального управления, в целом, свойственны различные проявления некорректности [1]. Естественно, в полной мере эти природные недостатки оптимизационных задач наследуют и соответствующие условия оптимальности, к которым, в первую очередь, относятся привычные классические принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина [2, 3]. В частности, мы говорим о неустойчивости классических условий оптимальности, понимая под этим, что сколь угодно малым возмущениям исходных данных оптимизационной задачи могут отвечать сколь угодно большие возмущения выделяемых этими условиями элементов.

Задачи оптимального управления, в которых имеют место проявления неустойчивости классических условий оптимальности, в большом числе возникают в различных естественнонаучных приложениях. К таким задачам следует, прежде всего, отнести задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства. К задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями–равенствами, по сути дела, относятся самые разнообразные обратные задачи естествознания, без умения эффективно решать которые трудно представить современные научные исследования. В этой связи, неустойчивость классических условий оптимальности ставит непреодолимую преграду на пути их непосредственного использования для решения большого класса актуальных естественнонаучных задач, в которых погрешности исходных данных жестко увязываются с физической сутью их постановок. Следующий простой, но в то же время содержательный пример характеризует вышесказанное.

Рассмотрим задачу

$$(P) \qquad \|z\|^2 \to \min, \ Az = p, \ \ z \in Z,$$

где $A : Z \to Z$ — линейный вполне непрерывный инъективный оператор с инъективным (и естественно вполне непрерывным) сопряженным A^*, Z — гильбертово пространство, $p \in Z$ любой такой элемент, для которого, во-первых, задача разрешима (очевидно, единственным образом) и, во-вторых, это решение z_p удовлетворяет регулярному принципу Лагранжа в дифференциальной форме $z_p = -\frac{1}{2}A^*\lambda \equiv z[\lambda]$ и в эквивалентной недифференциальной форме

$$L_p(z_p, \lambda) \le L_p(z, \lambda) \ \ \forall z \in Z, \ \ L_p(z, \lambda) \equiv \|z\|^2 + \langle \lambda, Az - p \rangle.$$

Легко видеть, что в качестве элемента p можно взять, например, $p = 0$.

Так как операторы A, A^* являются линейными вполне непрерывными и инъективными, то, с учетом равенства $(A^*)^* = A$, имеют место равенства $\overline{R(A)} = Z$, $\overline{R(A^*)} = Z$, причем $R(A) \ne Z$, $R(A^*) \ne Z$ (см. [4, с. 225, Теорема 1]), то есть исходное и сопряженное уравнения — плотно разрешимы (см. [5, с. 106]).

Возьмем последовательность элементов $z^k \in Z$, $k = 1, 2, \dots,$ такую, что $z^k \not\to z_p$, $k \to \infty$ (сильно), но одновременно $Az^k \to Az_p \equiv p$, $k \to \infty$ (сильно). В качестве такой последовательности годится, например, слабо сходящаяся к z_p последовательность $z^k \in Z$, $k = 1, 2, \dots.$ Так как $\overline{R(A^*)} = Z$, для любого элемента z^k найдется элемент $\lambda^k \in Z$, для которого соответствующий элемент $\widetilde{z}^k \equiv z[\lambda^k]$ можно считать сколь угодно близким к z^k. Пусть ϵ^k, $k = 1, 2, \dots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда считая, что элемент λ^k выбирается так, что $\|z^k - \widetilde{z}^k\| \le \epsilon^k$, $k = 1, 2, \dots,$ получаем, что $\widetilde{z}^k \not\to z_p$, $k \to \infty$, но одновременно $A\widetilde{z}^k \equiv p^k \to p$, $k \to \infty$ и, к тому же, в каждой задаче

$$\|z\|^2 \to \min, \ \ Az = A\widetilde{z}^k \equiv p^k, \ \ z \in Z,$$

решением которой является элемент $\widetilde{z}^k$, существует, как можно заметить, вектор Куна–Таккера и, соответственно, выполняется регулярный принцип Лагранжа.

Таким образом, можно утверждать, что существуют такие $p^k \to p$, $k \to \infty$, для которых в аппроксимирующих (при $p = p^k$) задачах (P) справедливо утверждение регулярного принципа Лагранжа, такого же как и в случае невозмущенной ($p = p$) задачи (P), но для которых одновременно оптимальные «аппроксимирующие» элементы не сходятся к решению невозмущенной задачи как по аргументу, так и по функции.

Рассмотрим далее обратную задачу финального наблюдения по нахождению начальной функции $v \in L_2(0,1)$ в третьей начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности

$$z_t - z_{xx} = 0, \quad z(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega \equiv (0,1), \tag{0.1}$$

$$z_x(0,t) - z(0,t) = 0, \quad z_x(1,t) + z(1,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

которую можно трактовать также как задачу оптимального управления с фазовым ограничением типа равенства в финальный момент времени (такое ограничение иногда называют полуфазовым) по нахождению начального управления в третьей начально-краевой задаче (0.1)

$$(P_{OC}) \qquad \int_0^1 v^2(x)\,dx \to \inf, \quad z[v](\cdot,T) = p \in L_2(0,1),$$

где $z[v]$ — обобщенное решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ начально-краевой задачи (0.1), соответствующее управлению $v \in L_2(0,1)$. Она может быть переписана в форме задачи (P)

$$\|v\|^2 \to \min, \ Av = p, \ v \in Z \equiv L_2(0,1)$$

с $A[v](\cdot) \equiv z[v](\cdot,T)$, $A[v] \equiv Av$, $A^*[q](\cdot) \equiv \eta[q](\cdot,0)$, $A^*[q] \equiv A^*q$, $\eta[q]$ — соответствующее элементу q обобщенное решение сопряженной третьей краевой задачи

$$\eta_t + \eta_{xx} = 0, \quad \eta(x,1) = q(x), \quad x \in (0,1),$$

$$\eta_x(0,t) - \eta(0,t) = 0, \quad \eta_x(1,t) + \eta(1,t) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Здесь в качестве пространства Z выступает пространство $L_2(0,1)$, а определенные выше операторы A, $A^* : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ являются инъективными (эта инъективность может быть установлена, например, на основе результатов [6, 7]), а значит, и $\overline{R(A)} = L_2(0,1)$, $\overline{R(A^*)} = L_2(0,1)$ (в силу инъективности и свойств линейных уравнений (см. [5, с. 106])), причем $R(A) \neq L_2(0,1)$, $R(A^*) \neq L_2(0,1)$ (в силу «заглаженности» решений краевых задач, см., например, [8, гл. III]).

Таким образом, анализ задачи (P) позволяет высказать важное утверждение, состоящее в том, что ни принцип Лагранжа, ни принцип максимума Понтрягина в их обычной классической форме не могут быть непосредственными инструментами для решения задачи (P_{OC}) и многих других аналогичных обратных задач, задач оптимального управления. Это порождает естественную мотивацию к такому «исправлению» классических условий оптимальности, которое приводит к следующим двум «ожидаемым» свойствам: 1) «исправленные» условия должны быть устойчивы к возмущениям исходных данных оптимизационной задачи; 2) они должны быть структурно устроены так же, как их классические аналоги.

С общих позиций понятно, что исправление данных природой недостатков классических принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина должно быть связано с использованием идей теории регуляризации. Однако не всякий метод регуляризации подходит для этой цели. По-видимому, наиболее адекватными, с точки зрения выполнимости указанных выше двух свойств, являются методы регуляризации, основанные на двойственности [9–11]. Применение основанных на двойственности методов регуляризации и одновременный переход к понятию минимизирующей последовательности допустимых элементов, как основному понятию в оптимизационной теории (вместо классического понятия оптимального элемента), открывают возможность естественной трансформации классических условий оптимальности. Эта трансформация приводит к их секвенциальным обобщениям в терминах классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина, которые: 1) обладают устойчивостью по отношению к ошибкам исходных данных задач; 2) полностью сохраняют общую структуру своих классических аналогов. Такие трансформированные условия оптимальности мы называем устойчивыми секвенцильными или, другими словами, регуляризованными, соответственно, принципом Лагранжа и принципом максимума Понтрягина [2, 3, 12–15]. Тем самым, трансформирование классических условий оптимальности в утверждения секвенциального характера, являющиеся одновременно устойчивыми к ошибкам исходных данных регуляризирующими алгоритмами решения оптимизационных задач, позволяет принципиально расширить сферу действия оптимизационной теории, основанной на привычных конструкциях функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина [12–17].

Итак, основной целью работы является обсуждение, на примере простейших по форме бесконечномерных оптимизационных задач, двух основных вопросов: зачем нужна регуляризация классических условий оптимальности и что она дает? Статья состоит из введения и четырех основных разделов, первый из которых посвящен постановке «простейшей» задачи выпуклого программирования с сильно выпуклым целевым функционалом и с операторным ограничением–равенством в гильбертовом пространстве. Во втором разделе кратко излагаются, применительно к этой задаче выпуклого программирования, основанные на двойственности методы двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации, формулируются теоремы их сходимости. В третьем разделе указанные теоремы сходимости применяются для доказательства в задаче выпуклого программирования регуляризованных принципа Лагранжа и принципа Лагранжа в итерационной форме. Наконец, в заключительном четвертом разделе результаты третьего раздела «расшифровываются» в форме регуляризованных итерационных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с фазовым ограничением–равенством для параболического уравнения, которую можно трактовать и как обратную задачу финального наблюдения для того же уравнения.

1. «Простейшая» задача выпуклого программирования

Рассмотрим «простейшую» задачу выпуклого программирования

$$(P^\delta) \qquad \|z\|^2 \to \min, \ A^\delta z = h^\delta, \ z \in \mathcal{D} \subset Z.$$

Здесь: $A^\delta : Z \to H$ — линейный ограниченный оператор, $h^\delta \in H$ — заданный элемент, $\mathcal{D} \subset Z$ — выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. Верхний индекс δ в исходных данных задачи (P^δ) означает, что эти данные являются точными ($\delta = 0$) или возмущенными ($\delta > 0$), то есть задаются с ошибкой, величину которой и характеризует число $\delta \in [0, \delta_0]$, где $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число.

Предположим, что $\|(A^\delta - A^0)z\| \le C\delta(1 + \|z\|) \ \forall\, z \in Z$, $\|h^\delta - h^0\| \le C\delta$, где $C > 0$ не зависит от δ. Обозначим единственное решение задачи (P^0), в случае его существования, через z^0. Обозначим: $\beta \equiv \{\|z^0\|^2,$ если z^0 существует; $+\infty$ в противном случае$\}$.

Введем необходимые обозначения: $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|A^\delta z - h^\delta\| \le \epsilon\}$, $\epsilon \ge 0$,

$$L^\delta(z,\lambda) \equiv \|z\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta\rangle, \ \ z^\delta[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}\{L^\delta(z,\lambda),\, z \in \mathcal{D}\}, \ \ V^\delta(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} L^\delta(z,\lambda)$$

и определим двойственную к (P^0) задачу

$$V^0(\lambda) \to \sup, \ \ \lambda \in H, \ \ V^0(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} L^0(z,\lambda).$$

Ниже при доказательстве регуляризованных принципов Лагранжа нам понадобятся следующие две связанные с двойственной задачей оценки, доказательство которых можно найти в [18].

Лемма 1.1. *Справедлива оценка* $\|z^\delta[\lambda] - z^0[\lambda]\| \le C\sqrt{\delta}(1 + \|\lambda\|)$, *где* $C > 0$ *— постоянная, не зависящая от* δ *и* $\lambda \in H$.

Лемма 1.2. *Пусть* $\|z^\delta[\lambda]\| \le M$ *и* $\|z^0[\lambda]\| \le M$ *и* M *не зависит от* δ. *Тогда* $|V^\delta(\lambda) - V^0(\lambda)| \le C\delta\|\lambda\|$, *где постоянная* $C > 0$ *зависит от* M, *но не зависит от* δ, *а также от* $\lambda \in H$ *таких, что* $\|z^\delta[\lambda]\| \le M$ *и* $\|z^0[\lambda]\| \le M$.

Центральную роль ниже при рассмотрении задачи (P^0) будет играть понятие минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [19]. Напомним, что минимизирующим приближенным решение в задаче (P^0) называется последовательность элементов $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1,2,\dots$, такая, что выполняются соотношения $\|z^k\|^2 \to \beta$, $z^k \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^k}$, $k \to \infty$, для некоторой сходящейся к нулю последовательности ϵ^k, $k = 1,2,\dots$ неотрицательных чисел.

Благодаря дифференцируемости по Фреше функционала $\|\cdot\|^2$ справедлива следующая (доказательство см., например, в [18]).

Лемма 1.3. *Пусть* $\beta < +\infty$. *Тогда для любого минимизирующего приближенного решения* z^k, $k = 1,2,\dots$ *в разрешимой в этом случае задаче* (P^0) *справедливо предельное соотношение* $z^k \to z^0$, $k \to \infty$.

Как легко заметить, упрощенность задачи характеризуется, во-первых, заданием конкретного простейшего функционала качества и, во-вторых, отсутствием ограничений–неравенств. С одной стороны, благодаря упрощенной постановке, задача (P^0) очень удобна для формулировки указанных выше регуляризованных условий оптимальности, которые в этом случае получаются также более компактными по записи и, как следствие, более удобными для понимания. С другой же стороны, эти формулировки достаточно полно передают основной содержательный смысл аналогичных результатов и для существенно более общих по форме оптимизационных задач на условный экстремум.

Попутно здесь представляется целесообразным отметить и то, что рассматриваемая «простейшая» по форме записи задача выпуклого программирования (P^0) является, в известном смысле, если так можно выразиться, и «самодостаточной» классической оптимизационной задачей, изучение которой имеет первостепенное значение с точки зрения многих естественнонаучных приложений [14–17].

2. Двойственная регуляризация и итеративная двойственная регуляризация

Опишем в данном разделе методы двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации [9–11] и сформулируем соответствующие теоремы сходимости для них, доказательство которых можно найти в указанных работах [9–11], а также в работах [2, 3, 14, 15].

Метод двойственной регуляризации. Обозначим через $\lambda^{\delta,\alpha}$ единственную в H точку, дающую на этом множестве максимум функционалу $R^{\delta,\alpha}(\lambda) \equiv V^\delta(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2$, $\lambda \in H$. Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \ \ \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{2.1}$$

Справедлива следующая [9–11, 14, 15]

Теорема 2.1. *Пусть задача (P^0) разрешима. Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, при условии согласования (2.1) выполняются соотношения*

$$\alpha(\delta)\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2 \to 0, \ \|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}]\|^2 \to \|z^0\|^2, \ A^0 z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^0 \to 0,$$

$$\langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^\delta \rangle \to 0, \ \delta \to 0,$$

и, как следствие (благодаря дифференцируемости по Фреше функционала $\|\cdot\|^2$), предельное соотношение (см. лемму 1.3) $\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}] - z^0\| \to 0, \ \delta \to 0$. Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная задача, алгоритм двойственной регуляризации является регуляризирующим. Одновременно справедливо и предельное соотношение $V^0(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}) \to \sup_{\lambda\in H} V^0(\lambda) = \|z^0\|^2, \ \delta \to 0$. Если же двойственная к (P^0) задача разрешима, то имеет место сходимость $\lambda^{\delta,\alpha(\delta)} \to \lambda^0$ при $\delta \to 0$, где $\lambda^0 \in H$ есть ее нормальное решение.

Метод итеративной двойственной регуляризации. Введем в рассмотрение итерационный процесс

$$\overline{\lambda}^{k+1} = \overline{\lambda}^k + \beta^k(A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] - h^{\delta^k}) - 2\beta^k\alpha^k\overline{\lambda}^k, \ \ k = 0,1,2,\ldots, \ \ \overline{\lambda}^0 \in H \tag{2.2}$$

с условиями согласования: $\alpha^k > 0, \ \beta^k > 0, \ \ \lim_{k\to\infty}(\delta^k + \alpha^k + \beta^k) = 0,$

$$\frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \le C_0, \quad \frac{|\alpha^{k+1} - \alpha^k|}{(\alpha^k)^3\beta^k} \to 0, \ \frac{\beta^k}{(\alpha^k)^3} \to 0, \ \frac{\delta^k}{(\alpha^k)^6} \to 0, \ \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k\beta^k = +\infty. \tag{2.3}$$

З а м е ч а н и е 2.1. Последовательности α^k и β^k, $k = 0,1,2,\ldots$, удовлетворяющие соотношениям (2.3), существуют. Например, в этом качестве можно использовать последовательности $\alpha^k = k^{-1/6}$, $\beta^k = k^{-1/(5/3)}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Справедлива следующая [9–11, 14, 15]

Теорема 2.2. *Пусть задача (P^0) разрешима и выполняются условия согласования (2.3). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, для генерируемой итерационным процессом (2.2) последовательности $\overline{\lambda}^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ выполняются предельные соотношения*

$$\alpha^k \|\overline{\lambda}^k\| \to 0, \;\; \|z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]\|^2 \to \|z^0\|^2, \;\; A^0 z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] - h^0 \to 0,$$

$$\langle \overline{\lambda}^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] - h^{\delta^k} \rangle \to 0, \quad \delta^k \to 0, \quad k \to \infty.$$

Как следствие, справедливо и предельное соотношение $\|z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] - z^0\| \to 0, \;\; k \to \infty.$ Одновременно с указанными предельными соотношениями выполняется и предельное соотношение $\lim\limits_{\delta^k \to +0} V^0(\overline{\lambda}^k) = \sup\limits_{\lambda \in H} V^0(\lambda) = \|z^0\|^2$. Если двойственная к (P^0) задача разрешима, то имеет место сходимость $\overline{\lambda}^k \to \lambda^0, \;\; k \to \infty,$ где $\lambda^0 \in H$ есть ее решение с минимальной нормой.

Эта теорема снабжается регуляризирующим правилом останова итерационного процесса (2.2) в случае, когда исходные данные оптимизационной задачи задаются с определенной фиксированной (конечной) погрешностью $\delta > 0$. Пусть числовые последовательности $\delta^k, \;\; \alpha^k, \;\; \beta^k, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots,$ удовлетворяют условиям (2.3). Зафиксируем следующее правило останова итерационного процесса (2.2)

$$\overline{\lambda}^{k+1} = \overline{\lambda}^k + \beta^k (A^\delta z^\delta[\overline{\lambda}^k] - h^\delta) - 2\beta^k \alpha^k \overline{\lambda}^k, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots; \;\; \overline{\lambda}^0 \in H \tag{2.4}$$

при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$: при каждом $\delta > 0, \;\; \delta \leq \delta^1$, итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства

$$\delta^k \geq \delta, \;\; k = 1, 2, \ldots, k(\delta). \tag{2.5}$$

Справедлива следующая [9–11, 14, 15]

Теорема 2.3. *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, справедливы предельные соотношения $\|z^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}]\|^2 \to \|z^0\|^2, \;\; A^0 z^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}] - h^0 \to 0$ и, как следствие, предельное соотношение $\|z^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}] - z^0\| \to 0, \;\; \delta \to 0,$ где $\overline{\lambda}^{k(\delta)}$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (2.4). Другими словами, указанное правило останова порождает регуляризирующий алгоритм в задаче (P^0).*

3. Регуляризованные принципы Лагранжа в «простейшей» задаче выпуклого программирования

Сформулируем и докажем в данном разделе регуляризованные принципы Лагранжа [2, 3, 14, 15] для задачи (P^0). Приводимые ниже доказательства основаны на сформулированных в предыдущем разделе теоремах сходимости 2.1, 2.2, 2.3 методов двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации с правилом останова итерационного процесса [9–11].

Формулируемые ниже регуляризованные принципы Лагранжа, которые можно также именовать регуляризованными теоремами Куна–Таккера (используемая функция

Лагранжа регулярна) для задачи (P^0), имеют вид утверждений о необходимых и достаточных условиях существования минимизирующего приближенного решения в задаче и о возможности аппроксимации решения z^0 точками минимума ее регулярной функции Лагранжа. Одновременно в них конструктивно предъявляются конкретные минимизирующие приближенные решения, аппроксимирующие решение z^0 и состоящие из указанных точек минимума регулярной функции Лагранжа.

Теорема 3.1. [***Регуляризованный принцип Лагранжа***] *Пусть задана произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел* δ^k, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* (P^0) *задача, для существования ограниченного минимизирующего приближенного решения в задаче* (P^0) *необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность* $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *такая, что выполняются соотношения*

$$\delta^k\|\lambda^k\|^2 \to 0,\ \ z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k,\epsilon^k},\ \ \epsilon^k \to 0,\ \ \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k] - h^{\delta^k}\rangle \to 0,\ \ k \to \infty, \tag{3.1}$$

а последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$ *была ограничена. Более того, эта последовательность* $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением задачи* (P^0) *и* $z^{\delta^k}[\lambda^k] \to z^0$, $k \to \infty$. *Кроме того, выполняется предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k) \to \sup_{\lambda\in H} V^0(\lambda). \tag{3.2}$$

В качестве последовательности $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *может быть взята последовательность* $\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\delta^k/\alpha(\delta^k) \to 0$, $k \to \infty$, *генерируемая алгоритмом двойственной регуляризации теоремы 2.1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимости, прежде всего, заметим, что задача (P^0) разрешима благодаря существованию ограниченного минимизирующего приближенного решения. Теперь выполнимость соотношений (3.1), (3.2) теоремы вытекает из теоремы 2.1, если в качестве точек λ^k и $z^{\delta^k}[\lambda^k]$ взять соответственно точки $\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}$ и $z^{\delta^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}]$, $k = 1, 2, \ldots$.

Для доказательства достаточности заметим, прежде всего, что задача (P^0) разрешима ввиду включения $z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k,\epsilon^k}$, ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, и условий на исходные данные задачи (P^0). Далее, так как точка $z^{\delta^k}[\lambda^k]$ минимизирует функционал $L^{\delta^k}(\cdot, \lambda^k)$, можем записать

$$\|z^{\delta^k}[\lambda^k]\|^2 + \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k] - h^{\delta^k}\rangle \le \|z\|^2 + \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z - h^{\delta^k}\rangle\ \forall\, z \in \mathcal{D}.$$

В силу условий теоремы отсюда следует, что

$$\|z^{\delta^k}[\lambda^k]\|^2 \le \|z\|^2 + \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z - h^{\delta^k}\rangle + \psi^k\ \forall\, z \in \mathcal{D},\ \ \psi^k \to 0,\ \ k \to \infty.$$

Положим здесь $z = z^0$ и используем условие согласования $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$. Тогда получаем $\|z^{\delta^k}[\lambda^k]\|^2 \le \|z^0\|^2 + \widetilde{\psi}^k$, $\widetilde{\psi}^k \to 0$, $k \to \infty$. Так как одновременно мы имеем включение $z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta,\epsilon^k}$, а следовательно, и $z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{0,\bar{\epsilon}^k}$, $\bar{\epsilon}^k \to 0$, $k \to \infty$, то можем утверждать, что последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1,2,\dots,$ является минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0) и, более того, $z^{\delta^k}[\lambda^k] \to z^0$, $k \to \infty$. Далее, так как последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1,2,\dots$ ограничена, то в силу оценки леммы 1.1 и предельного соотношения $\delta^k\|\lambda^k\|^2 \to 0$, $k \to \infty$ последовательность $z^0[\lambda^k]$, $k = 1,2,\dots$ также ограничена. Одновременно в силу равномерной по $k = 1,2,\dots$ ограниченности элементов $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $z^0[\lambda^k]$ и оценки леммы 1.2 получаем предельное соотношение $V^{\delta^k}(\lambda^k) - V^0(\lambda^k) \to 0$, $k \to \infty$. Так как при этом в силу доказанной сходимости $z^{\delta^k}[\lambda^k] \to z^0$, $k \to \infty$ и третьего из условий (3.1) имеет место сходимость $V^{\delta^k}(\lambda^k) \to \|z^0\|^2$, $k \to \infty$, то получаем окончательно

$$V^0(\lambda^k) \to \sup_{\lambda \in H} V^0(\lambda) = \|z^0\|^2.$$

З а м е ч а н и е 3.1. Подчеркнем, что сформулированная регуляризованная теорема Куна–Таккера 3.1 отличается от своего классического аналога двумя важными обстоятельствами: 1) она справедлива без каких-либо предположений регулярности (существования вектора Куна–Таккера) задачи (P^0); 2) она «устойчива» по отношению к ошибкам исходных данных и может использоваться, в частности, для решения некорректных задач, если последовательность λ^k, $k = 1,2,\dots$ выбирается в соответствии с алгоритмом двойственной регуляризации. При этом содержащиеся в ней условия обеспечивают одновременно как достаточное, так и необходимое условие существования минимизирующего приближенного решения в задаче. В этом состоит ее принципиальное отличие от классической теоремы Куна–Таккера.

Сформулируем далее регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме, который можно также именовать регуляризованной теоремой Куна–Таккера в итерационной форме. Приводимая формулировка, как и формулировка теоремы 3.1, содержит необходимые и достаточные условия существования минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0). Однако, в отличие от теоремы 3.1, в формулируемой ниже теореме одновременное конструктивное предъявление конкретного минимизирующего приближенного решения, аппроксимирующего решение z^0 и состоящего из точек минимума регулярной функции Лагранжа, основано на итерационной процедуре регуляризованного градиентного подъема в процессе максимизации функционала V^0 двойственной задачи.

Теорема 3.2. [***Регуляризованный итерационный принцип Лагранжа***] *Для того чтобы в задаче* (P^0) *существовало ограниченное минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно сходилось к* z^0*), необходимо и достаточно, чтобы для последовательности* $\overline{\lambda}^k \in H$, $k = 0,1,\dots,$ *порождаемой итерационным процессом (2.2), с условиями согласования (2.3) выполнялись соотношения*

$$z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k,\epsilon^k},\ \epsilon^k \to 0,\quad \langle \overline{\lambda}^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] - h^{\delta^k}\rangle \to 0,\ \ k \to \infty, \tag{3.3}$$

а последовательность $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 0,1,\dots,$ *была ограниченной. В этом случае последовательность* $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 0,1,\dots,$ *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (P^0) *и имеет место сходимость* $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] \to z^0$, $k \to \infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение* $V^0(\overline{\lambda}^k) \to \sup_{\lambda \in H} V^0(\lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимости заметим, прежде всего, что задача (P^0) разрешима в силу существования ограниченного минимизирующего приближенного решения и условий на ее исходные данные. Поэтому предельные соотношения (3.3) доказываемой теоремы являются следствиями теоремы 2.2. Далее, для доказательства достаточности, в первую очередь заметим, что задача (P^0) разрешима благодаря включениям $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k,\epsilon^k}$, $k = 0,1,\ldots,$ ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 0,1,\ldots,$ и условиям на исходные данные задачи. Тогда в силу той же теоремы 2.2 последовательность $\overline{\lambda}^k$, $k = 0,1,2,\ldots,$ порождаемая итерационным процессом (2.2) с условиями согласования (2.3), удовлетворяет помимо предельных соотношений (3.3) и предельному соотношению $\|z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]\|^2 \to \|z^0\|^2$, $k \to \infty$. По этой причине последовательность $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 0,1,\ldots,$ является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0), а значит, она и сходится к z^0. Далее, так как последовательность $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 1,2,\ldots,$ ограничена, то в силу оценки леммы 1.1, условия согласования $\delta^k/(\alpha^k)^6 \to 0$, $k \to \infty$ в (2.3) и предельного соотношения $\alpha^k\|\overline{\lambda}^k\| \to 0$, $k \to \infty$ теоремы 2.2 последовательность $z^0[\overline{\lambda}^k]$, $k = 1,2,\ldots,$ также ограничена. Одновременно в силу равномерной по $k = 1,2,\ldots$ ограниченности элементов $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]$, $z^0[\overline{\lambda}^k]$ и оценки леммы 1.2 получаем предельное соотношение $V^{\delta^k}(\overline{\lambda}^k) - V^0(\overline{\lambda}^k) \to 0$, $k \to \infty$. Так как при этом в силу доказанной сходимости $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] \to z^0$, $k \to \infty$ и второго из условий (3.3) имеет место сходимость $V^{\delta^k}(\lambda^k) \to \|z^0\|^2$, $k \to \infty$, то получаем окончательно $V^0(\lambda^k) \to \sup\limits_{\lambda\in H} V^0(\lambda) = \|z^0\|^2$.

Регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме теоремы 3.2 может быть снабжен и правилом останова итерационного процесса (2.2) в случае, когда исходные данные задачи (P^0) задаются с фиксированной конечной ошибкой. Это обстоятельство важно с точки зрения решения практических неустойчивых оптимизационных и сводящихся к ним задач. Тем самым оно обеспечивает возможность непосредственного применения регуляризованного итерационного принципа Лагранжа при решении самых разнообразных задач современного естествознания. Пусть последовательности δ^k, α^k, β^k, $k = 0,1,2,\ldots,$ удовлетворяют условиям согласования (2.3) и правило останова итерационного процесса (2.2), задаваемого в этой ситуации итерационной процедурой (2.4) с фиксированной конечной характеризующей ошибку исходных данных величиной δ, определяется как и в случае итеративной двойственной регуляризации: для каждого $\delta > 0$ такого, что $\delta \le \delta^1$, итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, для которого выполняются неравенства (2.5). Тогда теорема 2.3 позволяет утверждать, что справедлива

Теорема 3.3. *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* (P^0) *задача, справедливы предельные соотношения* $\|z^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}] - z^0\| \to 0$, $V^0(\overline{\lambda}^{k(\delta)}) \to \sup\limits_{\lambda\in H} V^0(\lambda)$, $\delta \to \infty$, *где* $\overline{\lambda}^{k(\delta)}$ *— результат* $k(\delta)$ *итераций итерационного процесса* (*2.4*) *с правилом останова, определяемым формулой* (*2.5*). *Таким образом, указанное правило останова порождает регуляризирующий алгоритм в задаче* (P^0).

4. Регуляризованные итерационные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах

Основной целью данного раздела является иллюстрация того, как устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа раздела 2 могут применяться для решения неустойчивых задач оптимального управления и сводящихся к ним обратных задач. Формулируемая ниже задача оптимального управления с упрощенным функционалом качества может трактоваться одновременно как обратная задача финального наблюдения. Для нее формулируются регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в итерационной форме с правилом останова итерационного процесса [12, 13].

Задача оптимального управления с фазовым ограничением–равенством. Пусть $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t) : x \in S,\ t \in (0,T)\}$, Ω — ограниченная область в R^n, $H \equiv L_2(\Omega)$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3 \subset L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$, $\mathcal{D}_1 \subset L_2(Q_T)$, $\mathcal{D}_2 \subset L_2(\Omega)$, $\mathcal{D}_3 \subset L_2(S_T)$ — выпуклые замкнутые множества. Обозначим тройки элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ через $\pi \equiv (u,v,w)$.

Рассмотрим задачу оптимального управления с фиксированным временем и с операторным ограничением равенством

$$(OC^\delta)\ \ \|\pi\|^2 \equiv \|u\|^2_{2,Q_T} + \|v\|^2_{2,\Omega} + \|w\|^2_{2,S_T} \to \min,\ \ A^\delta\pi \equiv z^\delta[\pi](\cdot,T) = h^\delta,\ \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \equiv Z.$$

Здесь: $h^\delta \in H$ заданная функция, $z^\delta[\pi]$ — обобщенное решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ [8] третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}\big) + a^\delta(x,t)z = u(x,t),\ \ z(x,0) = v(x),\ x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)z = w(x,t),\ (x,t) \in S_T,$$

соответствующее тройке $\pi \equiv (u,v,w) \in \mathcal{H} = Z$, $\frac{\partial z(x,t)}{\partial \mathcal{N}} \equiv a_{i,j}(x,t)z_{x_j}(x,t)\cos\alpha_i(x,t)$, $\alpha_i(x,t)$ — угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i. Как и в разделе 1, верхний индекс δ в исходных данных задачи (OC^δ) означает, что эти данные соответствуют либо ситуации их точного задания ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), то есть задаются с ошибкой, $\delta \in [0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число. Решение задачи с точными исходными данными (OC^0) (единственное), если оно существует (существует хотя бы одна допустимая тройка π, удовлетворяющая равенству $A^0\pi = h^0$), будем обозначать через π^0.

Считаем, что исходные данные задачи (OC^δ) удовлетворяют следующим условиям:

a) функции $a_{i,j}$, $a^\delta : \Omega \times [0,T] \to R^1$, $i,j = 1,\dots,n$ являются измеримыми по Лебегу;

b) выполняются оценки

$$\nu|\xi|^2 \le a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2\ \ \forall (x,t) \in Q_T,\ \nu,\mu > 0,$$

$$|a^\delta(x,t)| \le K \text{ при п.в. } (x,t) \in Q_T,\ \ |\sigma^\delta(x,t)| \le K \text{ при п.в. } (x,t) \in S_T,$$

где $K > 0$ — не зависящая от δ постоянная;

c) граница S является кусочно-гладкой.

Будем считать, что выполняются следующие оценки для отклонений возмущенных исходных данных от точных

$$\|a^\delta - a^0\|_{\infty,Q_T} \le \delta,\ \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T} \le \delta,\ \|h^\delta - h^0\|_{2,\Omega} \le \delta. \tag{4.2}$$

Регуляризованные итерационные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина. Задача (OC^δ) формально может быть записана как задача выпуклого программирования

$$(P^\delta) \qquad \|\pi\|^2 \to \min, \quad A^\delta\pi = h^\delta, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H} = Z,$$

совпадающая по форме с задачей выпуклого программирования (P^δ) раздела 1: $Z = \mathcal{H}$, $H = L_2(\Omega)$, $A^\delta : Z \to H$ — линейный ограниченный оператор, задаваемый равенством $A^\delta\pi = z^\delta[\pi](\cdot, T)$. В силу условий a) - c), теорема существования обобщенного решения третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью (см. [8, гл. III, §5]) обеспечивает разрешимость прямой задачи (4.1) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любой тройки $(u, v, w) \in Z$ и любого $T > 0$. Более того, мы имеем в этом случае и априорную оценку

$$|z^\delta[\pi]|_{Q_T} + \|z^\delta[\pi]\|_{2,Q_T} \le C(\|u\|_{2,Q_T} + \|v\|_{2,\Omega} + \|w\|_{2,S_T}),$$

в которой постоянная $C > 0$ не зависит от $\delta \in [0, \delta_0]$. Используя эту оценку в совокупоности с оценками (4.2), получаем оценку для отклонения возмущенного оператора $A^\delta : Z \to H = L_2(\Omega)$, $A^\delta\pi = z^\delta[\pi](\cdot, T)$ от его невозмущенного аналога в виде неравенства $\|(A^\delta - A^0)\pi\| \le C\delta(1 + \|\pi\|)$, в котором $C > 0$ — постоянная, не зависящая от δ (см., например [9]). Определим множество $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \{\pi \in \mathcal{D} : \|A^\delta\pi - h^\delta\| \le \epsilon\}$, функционал Лагранжа $L^\delta(\pi, \lambda) \equiv \|\pi\|^2 + \langle\lambda, A^\delta\pi - h^\delta\rangle$, его единственный минимизирующий элемент $\pi^\delta[\lambda]$ (функционал качества задачи (OC^δ) является сильно выпуклым и двойственную к (OC^δ) задачу $V^\delta(\lambda) \equiv \min_{\pi\in\mathcal{D}} L^\delta(\pi, \lambda) \to \sup$, $\lambda \in H = L_2(\Omega)$.

Теорема 3.2 позволяет сформулировать нам принцип Лагранжа в итерационной форме для задачи оптимального управления (OC^δ). Его формулировка использует классическую конструкцию функционала Лагранжа и не зависит от того, существует или нет, вектор Куна–Таккера в рассматриваемой задаче. Попутно заметим, что вопрос существования вектора Куна–Таккера в подобных задачах представляет собою самостоятельную сложную проблему.

Теорема 4.1. [***Регуляризованный итерационный принцип Лагранжа***] *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* (OC^0) *задача, для существования ограниченного минимизирующего приближенного решения в задаче* (OC^0) *необходимо и достаточно, чтобы для последовательности двойственной переменной* $\overline{\lambda}^k$, $k = 1, 2, \dots,$ *порождаемой итерационным процессом*

$$\overline{\lambda}^{k+1} = \overline{\lambda}^k + \beta^k(A^{\delta^k}\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] - h^{\delta^k}) - 2\beta^k\alpha^k\overline{\lambda}^k,\ k = 0, 1, 2, \dots,\ \overline{\lambda}^0 \in H = L_2(\Omega)$$

с условиями согласования (2.3) выполнялись соотношения

$$\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k,\epsilon^k}, \ \epsilon^k \to 0, \ \langle \overline{\lambda}^k, A^{\delta^k}\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] - h^{\delta^k}\rangle \to 0, \ k \to \infty.$$

Более того, последовательность $\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \ldots,$ *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (OC^0) *и* $\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] \to \pi^0$, $k \to \infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение* $V^0(\overline{\lambda}^k) \to \sup\limits_{\lambda\in H} V^0(\lambda)$.

Естественно, мы можем здесь сформулировать и соответствующее правило останова для итерационного процесса. В этом случае следствием теоремы 3.3 является

Теорема 4.2. *Вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к* (OC^0) *задача, справедливы предельные соотношения* $\|\pi^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}] - \pi^0\| \to 0$, $V^0(\overline{\lambda}^{k(\delta)}) \to \sup\limits_{\lambda\in H} V^0(\lambda)$, $\delta \to \infty$, *где* $\overline{\lambda}^{k(\delta)}$ *— результат* $k(\delta)$ *итераций итерационного процесса (2.4) с правилом останова, определяемым формулой (2.5). Таким образом, указанное правило останова порождает регуляризирующий алгоритм в задаче* (OC^0).

Получим далее регуляризованный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме из принципа Лагранжа в итерационной форме теоремы 4.1. Предположим для простоты, что множества $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ имеют более привычный для теории оптимального управления вид: $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_2(Q_T) : u(x,t) \in U$ п.в. на $Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_2(\Omega) : v(x) \in V$ п.в. на $\Omega\}$, $\mathcal{D}_3 \equiv \{w \in L_2(S_T) : w(x,t) \in W$ п.в. на $S_T\}$, где $U \subset R^1$, $V \subset R^1$, $W \subset R^1$ — выпуклые компакты. С целью перехода к регуляризованному принципу максимума Понтрягина запишем принцип максимума Понтрягина в простейшей задаче оптимального управления с сильно выпуклым функционалом Лагранжа в качестве функционала качества (см., например, [9])

$$L^\delta(\pi,\lambda) \equiv \|\pi\|^2 + \langle \lambda, z^\delta[\pi](\cdot,T) - h^\delta\rangle \to \min, \ \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \tag{4.3}$$

при произвольном фиксированном $\lambda \in H$. Очевидно, в силу выпуклости задачи (4.3) формулируемый ниже принцип максимума Понтрягина является критерием оптимальности для нее. Введем функции Гамильтона–Понтрягина: $H_u(u,\eta) \equiv \eta u - u^2$, $H_v(v,\eta) \equiv \eta v - v^2$, $H_w(w,\eta) \equiv \eta w - w^2$.

Лемма 4.1. *Тройка* $\pi^\delta[\lambda] \equiv (u^\delta[\lambda], v^\delta[\lambda], w^\delta[\lambda])$ *удовлетворяет обычному принципу максимума Понтрягина в задаче* (4.3) : для $\pi \equiv (u,v,w) = \pi^\delta[\lambda]$ выполняются соотношения максимума

$$\max_{r\in U} H_u(x,t,r,\eta^\delta[\lambda](x,t)) = H_u(x,t,u(x,t),\eta^\delta[\lambda](x,t)) \ \text{для п.в.} \ (x,t) \in Q_T, \tag{4.4}$$

$$\max_{r\in V} H_v(x,r,\eta^\delta[\lambda](x,0)) = H_v(x,v(x),\eta^\delta[\lambda](x,0)) \ \text{для п.в.} \ x \in \Omega,$$

$$\max_{r\in \mathcal{D}_3} \int_{S_T} \nabla_w H_w(s,t,w(s,t),\eta^\delta[\lambda](s,t)) r(s,t)\, ds\, dt =$$

$$\int_{S_T} \nabla_w H_w(s,t,w(s,t),\eta^\delta[\lambda](s,t))w(s,t)\,ds\,dt,$$

где $\eta^\delta[\lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение сопряженной задачи

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i}\big) + a^\delta(x,t)\eta = 0, \ \ \eta(x,T) = \lambda(x), \ \ x \in \Omega, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\eta = 0, \quad (x,t) \in S_T.$$

Обратно, в силу выпуклости задачи (OC^δ), любая тройка $\pi \in \mathcal{D}$, удовлетворяющая при некотором $\lambda \in \mathcal{H}$ соотношениям (4.4), (4.5), дает минимум в задаче (4.3).

Обозначим через $\pi^\delta_{max}[\lambda]$ элемент $\pi \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий всем соотношениям принципа максимума (4.4) леммы 4.1. Очевидно, в условиях данной работы $\pi^\delta_{\max}[\lambda] = \pi^\delta[\lambda]$. Благодаря лемме 4.1, регуляризованный итерационный принцип Лагранжа теоремы 4.1 может быть переписан в форме регуляризованного принципа максимума Понтрягина в итерационной форме.

Теорема 4.3. [***Принцип максимума Понтрягина в итерационной регуляризованной форме***] *Вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к (OC^0) задача, для существования минимизирующего приближенного решения в задаче (OC^0) необходимо и достаточно, чтобы для последовательности двойственной переменной $\overline{\lambda}^k$, $k = 0,1,2,\dots$, порождаемой итерационным процессом*

$$\overline{\lambda}^{k+1} = \overline{\lambda}^k + \beta^k \left(A^{\delta^k}\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k] - h^{\delta^k}\right) - 2\beta^k\alpha^k\overline{\lambda}^k, \ \ k = 0,1,2,\dots, \ \ \overline{\lambda}^0 \in H,$$

с условиями согласования (2.3), выполнялись соотношения

$$\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k,\epsilon^k}, \quad \epsilon^k \to 0, \ \ \langle \overline{\lambda}^k, A^{\delta^k}\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k] - h^{\delta^k}\rangle \to 0, \quad k \to \infty.$$

При этом последовательность $\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 1,2,\dots$, представляет собою искомое минимизирующее приближенное решение в задаче (OC^0) и $\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k] \to \pi^0$, $k \to \infty$. Более того, выполняется предельное соотношение $V^0(\overline{\lambda}^k) \to \sup_{\lambda\in H} V^0(\lambda)$.

Существенной особенностью регуляризованного принципа максимума Понтрягина в итерационной форме теоремы 4.3 является то, что, как и регуляризованный итерационный принцип Лагранжа теоремы 4.1, он предполагает, что величина δ^k, характеризующая ошибку отклонения возмущенных исходных данных от точных, стремится к нулю при $k \to \infty$. Однако, как и теорема 4.1, теорема 4.3 снабжается соответствующим регуляризирующим правилом останова итерационного процесса, почти дословно совпадающим с правилом останова, сформулированным после теоремы 4.1 (см. теорему 4.2). Оно может быть использовано для практического решения неустойчивых задач на основе устойчивого итерационного принципа максимума Понтрягина теоремы 4.3, так как представляет собою устойчивый алгоритм построения минимизирующего приближенного решения в задаче (OC^0). Пусть последовательности δ^k, α^k, β^k, $k = 0,1,2,\dots$

удовлетворяют условиям согласования (2.3). Пусть правило останова итерационного процесса (2.2)

$$\overline{\lambda}^{k+1} = \overline{\lambda}^k + \beta^k \left(A^\delta \pi^\delta_{\max}[\overline{\lambda}^k] - h^\delta \right) - 2\beta^k \alpha^k \overline{\lambda}^k, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, \;\; \overline{\lambda}^0 \in H, \tag{4.6}$$

с фиксированной конечной ошибкой $\delta > 0$ задается следующим образом: для каждого $\delta > 0$ такого, что $\delta \leq \delta^1$, итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, для которого

$$\delta^k \geq \delta, \;\; k = 1, 2, \ldots, k(\delta). \tag{4.7}$$

Теорема 4.4. *Вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к* (OC^0) *задача, выполняются предельные соотношения* $\pi^\delta_{\max}[\overline{\lambda}^{k(\delta)}] \to \pi^0, \quad V^0(\overline{\lambda}^{k(\delta)}) \to \sup\limits_{\lambda \in H} V^0(\lambda), \quad \delta \to 0,$ *где* $\overline{\lambda}^{k(\delta)}$ *есть результат* $k(\delta)$ *итераций итерационного процесса (4.6) с правилом останова (4.7). Другими словами, данное правило останова представляет собою регуляризирующий алгоритм в задаче* (OC^0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: в 2 т. М.: МЦНМО, 2011.

2. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594-1615.

3. *Сумин М.И.* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 25-49.

4. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.

5. Функциональный анализ / под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.

6. *Плотников В.И.* О сходимости конечномерных приближений (в задаче об оптимальном нагреве неоднородного тела произвольной формы) // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. № 1. С. 136-157.

7. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Известия АН СССР. Серия математическая. 1968. Т. 32. № 4. С. 743-755.

8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

9. *Сумин М.И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 11. С. 2001-2019.

10. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 602-625.

11. *Сумин М.И.* Параметрическая двойственная регуляризация в оптимизации, оптимальном управлении и обратных задачах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 1. С. 467-492.

12. *Кутерин Ф.А., Сумин М.И.* Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении I: оптимизация сосредоточенной системы // Вестник

Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 474-489.

13. *Кутерин Ф.А., Сумин М.И.* Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении II: оптимизация распределенной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 26-41.

14. *Кутерин Ф.А., Сумин М.И.* О регуляризованном принципе Лагранжа в итерационной форме и его применении для решения неустойчивых задач // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 11. С. 3-18.

15. *Кутерин Ф.А., Сумин М.И.* Устойчивый итерационный принцип Лагранжа в выпуклом программировании как инструмент для решения неустойчивых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 1. С. 55-68.

16. *Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А.* Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 608-624.

17. *Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А.* Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 2. С. 187-209.

18. *Сумин М.И.* Некорректные задачи и методы их решения. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2009. 289 с.

19. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

Поступила в редакцию 10 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 15 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Сумин Михаил Иосифович, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: m.sumin@mail.ru

Для цитирования: *Сумин М.И.* Зачем нужна регуляризация принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина и что она дает // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 757–775. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-757-775

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-757-775

WHY REGULARIZATION OF LAGRANGE PRINCIPLE AND PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE IS NEEDED AND WHAT IT GIVES

M. I. Sumin

Nizhnii Novgorod State University named after N.I. Lobachevskii
23 Gagarin St., Nizhnii Novgorod 603950, Russian Federation
E-mail: m.sumin@mail.ru

Abstract. We consider the regularization of the classical Lagrange principle and the Pontryagin maximum principle in convex problems of mathematical programming and optimal control. On example of the "simplest" problems of constrained infinite-dimensional optimization, two main questions are discussed: why is regularization of the classical optimality conditions necessary and what does it give?
Keywords: convex programming; dual regularization; regularized Lagrange principles; optimal control; inverse problem; regularized iterative Pontryagin maximum principle

REFERENCES

1. Vasil'yev F.P. *Metody optimizatsii: v 2 t.* [Optimization Methods: in 2 Vols.]. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education Publ., 2011. (In Russian).

2. Sumin M.I. Regulyarizovannaya parametricheskaya teorema Kuna–Takkera v gil'bertovom prostranstve [Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space]. *Zhurnal vychislitel'-noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1594-1615. (In Russian).

3. Sumin M.I. Ustoychivoye sekventsial'noye vypukloye programmirovaniye v gil'bertovom prostranstve i ego prilozheniye k resheniyu neustoychivykh zadach [Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 25-49. (In Russian).

4. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 496 p. (In Russian).

5. Krein S.G. (ed.). *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 544 p. (In Russian).

6. Plotnikov V.I. O skhodimosti konechnomernykh priblizheniy (v zadache ob optimal'nom nagreve neodnorodnogo tela proizvol'noy formy) [The convergence of finite-dimensional approximations (in the problem of the optimal heating of an inhomogeneous body of arbitrary shape)]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1968, vol. 8, no. 1, pp. 136-157. (In Russian).

7. Plotnikov V.I. Energeticheskoye neravenstvo i svoystvo pereopredelennosti sistemy sobstvennykh funktsiy [An energy inequality and the overdeterminacy property of a system of eigenfunctions].

Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya – Mathematics of the USSR – Izvestiya, 1968, vol. 32, no. 4, pp. 743-755. (In Russian).

8. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type]. Moscow, Nauka, 1967, 736 p. (In Russian).

9. Sumin M.I. Regulyarizovannyy gradiyentnyy dvoystvennyy metod resheniya obratnoy zadachi final'nogo nablyudeniya dlya parabolicheskogo uravneniya [A regularized gradient dual method for the inverse problem of a final observation for a parabolic equation]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 11, pp. 2001-2019. (In Russian).

10. Sumin M.I. Regulyarizatsiya v lineyno vypukloy zadache matematicheskogo programmirovaniya na osnove teorii dvoystvennosti [Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 4, pp. 602-625. (In Russian).

11. Sumin M.I. Parametricheskaya dvoystvennaya regulyarizatsiya v optimizatsii, optimal'nom upravlenii i obratnykh zadachakh [Parametric dual regularization in optimization, optimal control and inverse problems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2010, vol. 15, no. 1, pp. 467-492. (In Russian).

12. Kuterin F.A., Sumin M.I. Regulyarizovannyy iteratsionnyy printsip maksimuma Pontryagina v optimal'nom upravlenii I: optimizatsiya sosredotochennoy sistemy [The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. I. Optimization of a lumped system]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2016, vol. 26, no. 4, pp. 474-489. (In Russian).

13. Kuterin F.A., Sumin M.I. Regulyarizovannyy iteratsionnyy printsip maksimuma Pontryagina v optimal'nom upravlenii II: optimizatsiya raspredelennoy sistemy [The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. II. Optimization of a distributed system]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 26-41. (In Russian).

14. Kuterin F.A., Sumin M.I. O regulyarizovannom printsipe Lagranzha v iteratsionnoy forme i ego primenenii dlya resheniya neustoychivykh zadach [On the regularized Lagrange principle in the iterative form and its application for solving unstable problems]. *Matematicheskoye modelirovaniye – Mathematical Models and Computer Simulations*, 2016, vol. 28, no. 11, pp. 3-18. (In Russian).

15. Kuterin F.A., Sumin M.I. Ustoychivyy iteratsionnyy printsip Lagranzha v vypuklom programmirovanii kak instrument dlya resheniya neustoychivykh zadach [Stable iterative Lagrange principle in convex programming as a tool for solving unstable problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 1, pp. 55-68. (In Russian).

16. Kalinin A.V., Sumin M.I., Tyukhtina A.A. Ustoychivyye sekventsial'nyye printsipy Lagranzha v obratnoy zadache final'nogo nablyudeniya dlya sistemy uravneniy Maksvella v kvazistatsionarnom magnitnom priblizhenii [Stable sequential Lagrange principles in the inverse final observation problem for the system of Maxwell equations in the quasistationary magnetic approximation]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 608-624. (In Russian).

17. Kalinin A.V., Sumin M.I., Tyukhtina A.A. Ob obratnykh zadachakh final'nogo nablyudeniya dlya sistemy uravneniy Maksvella v kvazistatsionarnom magnitnom priblizhenii i ustoychivykh

sekventsial'nykh printsipakh Lagranzha dlya ikh resheniya [Inverse final observation problems for Maxwell's equations in the quasi-stationary magnetic approximation and stable sequential lagrange principles for their solving]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 2, pp. 187-209. (In Russian).

18. Sumin M.I. *Nekorrektnyye zadachi i metody ikh resheniya* [Ill-Posed Problems and their Solutions]. Nizhny Novgorod, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 2009, 289 p. (In Russian).

19. Warga J. *Optimal Control of Differential and Functional Equations.* New York, Academic Press, 1972, 531 p.

Received 10 April 2018
Reviewed 15 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Sumin Mikhail Iosifovich, Nizhnii Novgorod State University named after N.I. Lobachevskii, Nizhnii Novgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, e-mail: m.sumin@mail.ru

For citation: Sumin M.I. Zachem nuzhna regulyarizatsiya printsipa Lagranzha i printsipa maksimuma Pontryagina i chto ona daet [Why regularization of Lagrange principle and Pontryagin maximum principle is needed and what it gives]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 757–775. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-757-775 (In Russian, Abstr. in Engl.).